گزینه دو

مؤسسه آموزشی فرهنگی

هندسه ۲

(فصل ۴)

هندسه فضایی:

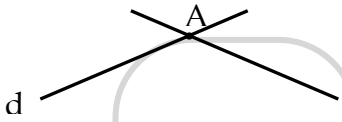
الف) خط و صفحه در فضای سه بعدی اقلیدسی:

فضای سه بعدی اقلیدسی:

فضایی که در آن زندگی می‌کنیم مدلی از فضای اقلیدسی یا فضای سه بعدی است. فضای سه بعدی اقلیدسی یکی از مفهومهای اولیه یا تعریف نشده است. فضا مجموعه‌ای از بی‌نهایت نقطه می‌باشد. خط و صفحه نیز که به ترتیب دارای یک بعد و دو بعد می‌باشند، هر یک زیر مجموعه‌ای از فضا می‌باشند.

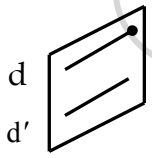
اوضاع نسبی دو خط در فضا:

۱) دو خط که تنها در یک نقطه مشترک باشند، خط‌های متقاطع نامیده می‌شوند.



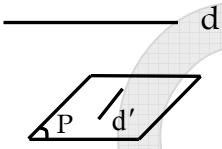
$$d \cap d' = \{A\}$$

۲) دو خط متمایز که در یک صفحه باشند و نقطه‌ی مشترک نداشته باشند یا در بی‌شمار نقطه مشترک باشند، خط‌های موازی گفته می‌شوند.



$$d, d' \subset P \quad , \quad d \cap d' = \phi \quad \vee \quad d \cap d' = d = d'$$

۳) دو خط متمایز که نقطه مشترک نداشته باشند و در یک صفحه نیز واقع نباشند، متنافر نامیده می‌شوند.

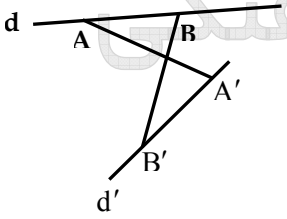


$$d \not\subset P, d' \subset P, d \cap d' = \phi$$

مثال: دو خط d', d متنافرند. اگر B, A دو نقطه از d و B', A' دو نقطه از d' باشند، دو خط AA' و BB' کدام وضع را دارند؟

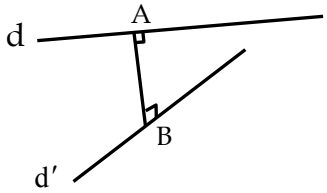
۱) متوازیند ۲) متقاطعند ۳) متنافرند ٤) یا متوازی یا متنافرند

حل: گزینه ۳ صحیح است.



اگر خط‌های AA' و BB' متنافر نباشند، متقاطع یا متوازیند. در این صورت از AA' و BB' صفحه‌ای می‌گذرد که شامل d', d است و این خلاف فرض است. بنابر این، AA' و BB' متنافرند.

عمود مشترک دو خط متنافر:



عمود مشترک دو خط متنافر d', d، پاره‌خطی است عمود بر هر دو خط و متکی بر آن‌ها. در شکل مقابل پاره‌خط AB عمود مشترک دو خط متنافر d', d است.

عمود مشترک دو خط متنافر، کوتاه‌ترین پاره‌خط متکی بر آن‌هاست.

نکته مهم: تصویرهای دو خط متنافر d', d بر صفحه P که موازی عمود مشترک آن‌هاست، دو خط موازی است.

مثال: هر گاه خطی صفحه‌ای را قطع کند، کدام حکم همواره صحیح است؟

۱) فقط یک خط از صفحه را قطع می‌کند.

۲) با بعضی از خط‌های صفحه موازی و با بعضی متقاطع است.

۳) با بعضی از خط‌های صفحه متقاطع و با بعضی متنافر است.

٤) با بعضی از خط‌های صفحه متقاطع و با بعضی متنافر و با بعضی موازی است.

حل: گزینه ۳ صحیح است.

آن خط، با تمام خطوطی که از نقطه برخورد می‌گذرند، متقاطع و با بقیه متنافر است.

مثال: وقتی خط A بر دو خط متنافر B و C در فضا عمود است، کدامیک از حکم‌های زیر همواره درست است؟

۱) B و C در یک صفحه‌اند.

۲) B با C موازی است.

۳) A عمود مشترک B و C است.

٤) A با عمود مشترک B و C موازی است.

حل: گزینه ٤ صحیح است.

عمود مشترک دو خط C,B پاره‌خطی عمود بر هر دوی آنها است و هر خطی که موازی عمود مشترک باشد نیز بر هر دو خط C, B عمود است. (متنافراً عمود است.)

زاویه بین دو خط متنافر:

زاویه دو خط متنافر، معمولاً زاویه‌ی حاده یا قائمه بین دو خط است که از یک نقطه موازی دو خط متنافر رسم شده باشند.

اگر زاویه بین دو خط متنافر قائمه باشد، می‌گوییم دو خط مزبور متنافراً بر یکدیگر عمودند یا با هم زاویه قائمه تشکیل می‌دهند یا راستای عمود بر هم دارند.



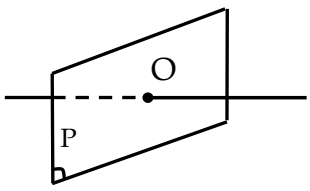
اصل اقلیدس:

هر خط d و یک نقطه Oواقع در خارج آن خط یک صفحه مانند P را مشخص می‌کنند. در این صفحه بر نقطه‌ی O یک خط و فقط یک خط موازی خط d مرور می‌کند. هر خط دیگری که بر نقطه‌ی O بگذرد و در صفحه‌ی P نباشد، موازی خط d نیست.لذا بر هر نقطه تنها یک خط موازی خط مفروض مرور می‌کند.

اوضاع نسبی خط و صفحه:

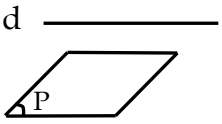
هر صفحه P و هر خط راست d را به صورت مجموعه ای از نقاط می‌توان در نظر گرفت. وضع خط و صفحه نسبت به هم از سه صورت زیر خارج نیست:

۱) اشتراک دو مجموعه، مجموعه‌ای شامل تنها یک نقطه مانند O است. در این صورت گوییم خط d و صفحه P در نقطه O متقاطعند.



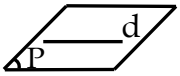
$$d \cap P = \{O\}$$

۲) دو مجموعه عضو مشترک ندارند، یعنی اشتراک آنها مجموعه‌ی تهی است و خط و صفحه موازیند.



$$d \cap P = \phi$$

۳) اشتراک دو مجموعه بیش از یک عضو دارد، در اینصورت به موجب خاصیت اصلی صفحه، همه‌ی نقطه‌های خط d بر صفحه‌ی P واقعند، یعنی خط d بر صفحه P واقع یا منطبق است.



$$d \subseteq P$$

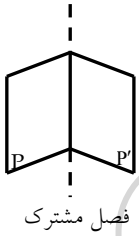
تعریف: یک خط را موازی یک صفحه می‌گوییم، هرگاه بر آن صفحه منطبق باشد یا با آن صفحه اصولاً نقطه‌ی مشترک نداشته باشد.
در این حالت صورت نمادی توازی خط و صفحه چنین است:

$$\left(d \subseteq P \vee d \cap P = \phi\right) \Rightarrow d \parallel P$$

اوضاع نسبی دو صفحه:

قضیه: بر سه نقطه‌ی غیر واقع بر یک خط راست، فقط و فقط یک صفحه می‌گذرد.

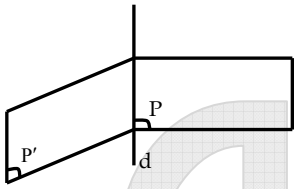
قضیه: اگر دو صفحه متمایز P و P' یک نقطه مشترک A داشته باشند، آن دو صفحه، فقط در یک خط راست که بر A می‌گذرد، مشترکند. دو صفحه متمایز را که در یک خط راست مشترک باشند، دو صفحه متقاطع و خط مزبور را فصل مشترک آن دو صفحه می‌گوییم.



وضع نسبی دو صفحه:

دو صفحه‌ی P و P' را به عنوان مجموعه‌ی نقاط در نظر می‌گیریم، وضع دو صفحه از سه صورت زیر خارج نیست:

۱) دو صفحه متمایزند ولی اشتراک آن‌ها تهی نیست، در اینصورت دو صفحه فقط در یک خط راست مشترکند، که فصل مشترک آن دو صفحه نامیده می‌شود. چنین صفحه‌هایی را متقاطع گوییم. مانند صفحه‌های P و P' که در خط d متقاطعند.

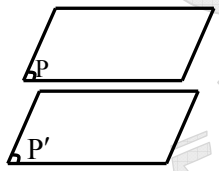


$$P \cap P' = d$$

۲) دو صفحه بر هم منطبقند.

$$P \cap P' = P = P'$$

۱- اشتراک دو صفحه مجموعه‌ای است تهی مانند شکل:



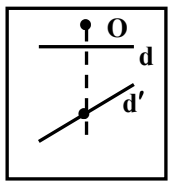
$$P \cap P' = \phi$$

تعریف: دو صفحه موازی نامیده می‌شوند،هرگاه یا نقطه‌ی مشترکی نداشته باشند یا بر هم منطبق باشند. انطباق، حالت خاصی از توازی است.

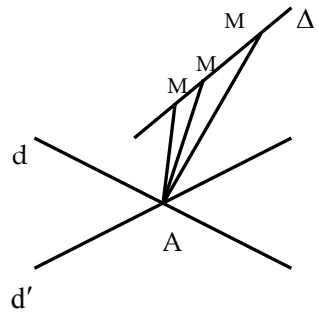
مثال: دو خط متنافر d_1 و d_2 و نقطه‌ی O که در هیچ یک از صفحه‌هایی که از یکی به موازات دیگری رسم می‌شوند، قرار ندارد مفروضند. چند خط از O می‌توان رسم کرد که دو خط d_1 و d_2 را قطع کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ٤) هیچ

حل: گزینه ۱ صحیح است.



از O و d_1 یک صفحه می گذرد، که چون O در صفحه‌ای از d به موازات d_2 رسم می‌شود قرار ندارد، این صفحه با d_2 متقاطع است. اگر از O به نقطه تقاطع این صفحه با d_2 وصل کنیم خط حاصل جواب مسأله است. همچنین این خط فصل مشترک صفحه شامل O و d_1 و صفحه شامل O و d_2 است.



مثال: دو خط d', d در نقطه‌ی A متقاطعند و خط Δ با آنها متنافر است. اگر M نقطه‌ای متغیر از خط Δ باشد، مکان هندسی فصل مشترک صفحه‌ای که بر M, d می‌گذرد با صفحه‌ای که بر M, d' می‌گذرد کدام است؟

۱) صفحه‌ای است که بر A, Δ می‌گذرد.
۲) دو خط گذرا بر A است.
۳) صفحه‌ای است عمود بر خط d.
۴) صفحه‌ای است عمود بر خط d'.

حل: گزینه ۱ صحیح است.

صفحه‌ای که بر M, d می‌گذرد با صفحه‌ای که بر M, d' می‌گذرد، همواره در دو نقطه M, A مشترکند. پس در خط AM مشترکند و چون نقطه M بر روی خط Δ تغییر مکان می‌دهد، پس فصل مشترکها خط‌هایی هستند که از A می‌گذرند و Δ را قطع می‌کنند. بنابر این مکان هندسی فصل مشترک دو صفحه، صفحه‌ای است که بر نقطه A و خط Δ می‌گذرد.

توازی خط و صفحه:

یک خط را وقتی موازی صفحه می‌گوییم که یا بر آن صفحه واقع باشد، یا آن که با آن صفحه نقطه‌ی مشترک نداشته باشد. در حالتی که خط با صفحه فقط یک نقطه مشترک داشته باشد، گوییم خط و صفحه یکدیگر را قطع کرده‌اند.

شرط توازی خط و صفحه:

قضیه: هر خط که با یکی از خطهای صفحه‌ای موازی باشد، با آن صفحه موازی است. یعنی اگر d مجموعه‌ی نقاط یک خط و P مجموعه نقاط یک صفحه باشد:

$$(d \parallel d_1 \ , \ d_1 \subset P) \Rightarrow d \parallel P$$

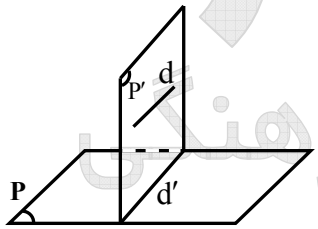
مثال: خط d و صفحه P متقاطعند، در صفحه P چند خط موازی با d می‌توان رسم کرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

حل: گزینه ۳ صحیح است.

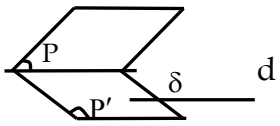
در صفحه P نمی‌توان خطی موازی با d رسم کرد، زیرا اگر d با خطی از صفحه P موازی باشد، با صفحه‌ی P موازی خواهد شد و این خلاف فرض است.

گزاره‌هایی درباره‌ی توازی خط و صفحه:



۱) هرگاه خطی با صفحه‌ای موازی باشد، هر صفحه که بر آن خط بگذرد و با صفحه مفروض موازی نباشد، آن صفحه را در خطی قطع می‌کند که با خط مفروض موازی است. یعنی اگر خط d با صفحه P موازی باشد و صفحه P' بر d بگذرد و صفحه P را در خط d' قطع کند آنگاه $d \parallel d'$

$$(d \parallel P \ , \ d \subseteq P' \ , \ P \not\parallel P' \ , \ P \cap P' = d') \Rightarrow d \parallel d'$$



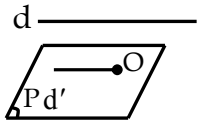
۲) اگر خطی با دو صفحه متقاطع موازی باشد، با فصل مشترک آن دو صفحه موازی است. یعنی اگر P', P دو صفحه و d یک خط راست باشد:

$$(P \cap P' = \delta \ , \ d \parallel P \ , \ d \parallel P') \Rightarrow d \parallel \delta$$

مثال: بر یک نقطه واقع در خارج خط مفروض d چند صفحه موازی با d می‌گذرد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) صفر ۴) بی‌شمار

حل: گزینه ۴ صحیح است.

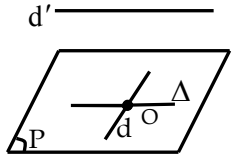


از نقطه‌ی O خط d' را موازی با d رسم می‌کنیم. هر صفحه‌ای که از d' می‌گذرد با خط d موازی خواهد بود. چون از d' بی‌شمار صفحه می‌گذرد، پس مسأله بی‌شمار جواب دارد.

مثال: دو خط d', d متنافرند. بر خط d چند صفحه موازی با d' می‌توان رسم نمود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ٤) صفر

حل: گزینه ۱ صحیح است.

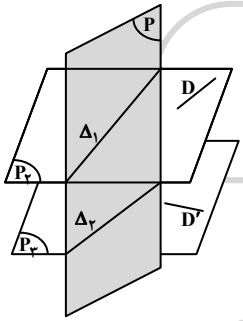


اگر از نقطه‌ی دلخواه O واقع بر خط d، خط Δ را موازی با d' رسم کنیم، صفحه‌ای که از d و Δ می‌گذرد با خط d' موازی است، چون از d و Δ فقط یک صفحه می‌گذرد مسأله فقط یک جواب دارد.

مثال: هر یک از دو خط متنافر D و D' با صفحه‌ی P متقاطع‌اند. صفحه‌ی دوم شامل خط D و موازی خط D'، صفحه‌ی سوم شامل خط D' و موازی خط D مشخص شده‌اند. تعداد فصل مشترک‌های دوبه‌دوی این سه صفحه کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ٤) ۳

حل: گزینه ۳ پاسخ است.



صفحات دوم و سوم یعنی P_2 و P_3 موازی هم خواهند شد و در نتیجه این سه صفحه کلاً دو به دو دارای دو فصل مشترک Δ_1 و Δ_2 خواهند شد.

مثال: دو خط D و D' مفروض‌اند. اگر فقط یک جفت صفحات موازی P و P' بتوان یافت، به‌طوری‌که $D \subset P$ و $D' \subset P'$، آن‌گاه D و D' نسبت به هم چگونه‌اند؟

۱) متنافر ۲) موازی ۳) متقاطع ٤) عمود بر هم

حل: گزینه ۱ پاسخ است.

فقط یک جفت صفحه‌ی موازی شامل دو خط متنافر می‌توان رسم کرد.

صورت‌های مختلف نمایش صفحه:

۱) هر سه نقطه غیر واقع بر یک خط راست یک صفحه را مشخص می‌کنند، بنابر این هر صفحه را با سه نقطه از آن که بر یک خط راست واقع نباشند، می‌توان نشان داد.

۲) اگر یک خط و نقطه‌ای خارج آن مفروض باشند، سه نقطه‌ی غیر واقع بر یک خط راست می‌توان در نظر گرفت، که دو نقطه‌ی آنها بر خط و نقطه‌ی سوم همان نقطه‌ای باشد که خارج خط فرض شده است، بر این سه نقطه یک صفحه و فقط یک صفحه می‌گذرد. بنابراین، هر صفحه را با یک خط آن و نقطه‌ای از آن که خارج خط باشد می‌توان نمایش داد.

۳) هرگاه دو خط d و d' موازی باشند، آن دو خط در یک صفحه واقعند. پس یک صفحه را مشخص می‌کنند بنابر این، هر صفحه را با دو خط متوازی از آن می‌توان نمایش داد. (دو نقطه از d و نقطه‌ای از d' در نظر می‌گیریم و از این سه نقطه فقط و فقط یک صفحه عبور می‌کند.)

٤) اگر دو خط d', d در O متقاطع باشند، نقطه‌ی O و دو نقطه‌ی دیگر یکی بر d و دیگری بر d'، سه نقطه غیر واقع بر یک امتدادند که یک صفحه را مشخص می‌کنند. پس هر صفحه را با دو خط متقاطع از آن می‌توان نمایش داد.

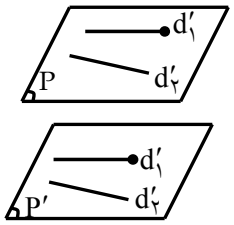
۵) یکی دیگر از صورت‌های نمایش صفحه، نمایش صفحه با یک نقطه از آن و یک خط عمود بر صفحه مورد نظر است. زیرا صفحه‌ای که از یک نقطه بگذرد و بر خط مفروضی عمود باشد، یکتا است.

توازی دو صفحه:

می‌دانیم که دو صفحه متمایز وقتی موازی هستند که هیچ نقطه‌ی مشترکی نداشته باشند. اگر دو صفحه موازی باشند، هر خط واقع بر یکی با صفحه‌ی دیگر موازی است، یعنی اگر P', P دو صفحه باشند و خط d در صفحه‌ی P باشد: $(P \parallel P', d \subset P) \Rightarrow d \parallel P'$

شرط توازی دو صفحه:

قضیه: هرگاه دو خط غیر موازی از صفحه‌ای با دو خط غیر موازی از صفحه‌ی دیگر دو به دو موازی باشند، آن دو صفحه متوازی‌اند، یعنی اگر دو خط ناموازی d_1, d_2 از صفحه P به ترتیب با دو خط ناموازی d'_1, d'_2 از صفحه‌ی P' موازی باشند، دو صفحه‌ی P', P متوازی‌اند.



$$(d_1 \not\parallel d_2 \ , \ d_1, d_2 \subseteq P \ , \ d'_1, d'_2 \subseteq P' \ , \ d_1 \parallel d'_1 \ , \ d_2 \parallel d'_2) \Rightarrow P \parallel P'$$

قضیه: بر هر نقطه واقع در خارج صفحه یک صفحه و فقط یک صفحه موازی آن صفحه می‌گذرد.

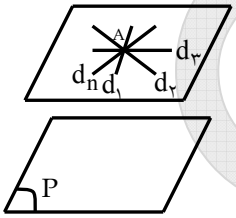
نکات:

۱) اگر دو خط متوازی باشند، هر صفحه موازی با یکی با دیگری نیز موازی است.

۲) اگر دو صفحه‌ی متمایز متوازی باشند، هر صفحه که یکی از آنها را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند و فصل مشترک‌های آن با دو صفحه مزبور دو خط متوازیند. یعنی اگر Q, P', P سه صفحه‌ی متمایز باشند:

$$(P \parallel P' \ , \ P \cap Q = d) \Rightarrow (P' \cap Q = d' \ , \ d' \parallel d)$$

۳) همه‌ی خط‌های همرسی که با یک صفحه موازی هستند بر صفحه‌ای موازی آن صفحه قرار دارند.



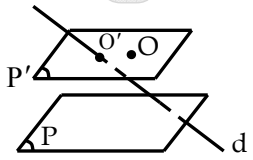
$$(d_1 \cap d_2 \cap \cdots \cap d_n = \{A\} \ , \ d_1, d_2, \ldots, d_n \parallel P) \Rightarrow d_1, d_2, \ldots, d_n \subset P' \parallel P$$

مثال: صفحه P و خط d متقاطع با آن مفروض است. از نقطه‌ی مفروض O غیر واقع بر خط d چند خط موازی با صفحه‌ی P و متقاطع با خط d می‌توان رسم نمود؟

۱) ۲ ۲) صفر ۳) ۱ ٤) بی‌شمار

حل: گزینه ۳ صحیح است.

همه‌ی خط‌هایی که از نقطه‌ی O موازی با صفحه P رسم می‌شوند در صفحه‌ای موازی با صفحه P قرار دارند، این صفحه را P' می‌نامیم. صفحه P' خط d را در نقطه‌ای مانند O' قطع می‌کند، OO' خط منحصر به فردی است که d را قطع می‌کند و با P موازی است و از O می‌گذرد. پس مسأله فقط یک جواب دارد.



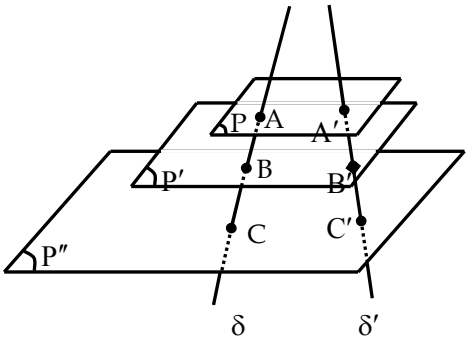
مثال: اگر دو خط متمایز از نقطه‌ی مفروض O گذشته و با خط مفروض d متقاطع بوده و با صفحه‌ی P موازی باشند، آنگاه وضع خط d و صفحه‌ی P چگونه است؟

۱) $d \parallel P$ ۲) $d \subset P$ ۳) $d \perp P$ ٤) $d \cap P \neq \phi$

حل: گزینه ۱ صحیح است.

اگر دو خط متقاطع مفروض با صفحه‌ی P موازی باشند، آنگاه صفحه‌ی شامل این دو خط نیز با صفحه‌ی P موازی است. پس خط d که در این صفحه قرار می‌گیرد، نیز با صفحه‌ی P موازی خواهد بود.

صورت فضایی قضیه تالس:



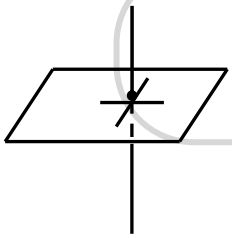
صفحه‌های متوازی بر خط‌هایی که آن‌ها را قطع می‌کنند، پاره‌خط‌هایی پدید می‌آورند که نظیر به نظیر متناسبند. یعنی اگر سه صفحه‌ی متوازی P'',P',P خط δ را در نقاط C,B,A و خط δ' را در نقاط C',B',A' قطع کرده باشد، داریم:

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$$

نکته: عکس قضیه تالس در فضا لزوماً برقرار نیست. یعنی اگر سه صفحه بر دو خط پاره‌خط‌های نظیر به نظیر متناسب پدید آوردند، سه صفحه لزوماً موازی نیستند.

خط و صفحه‌ی عمود بر هم:

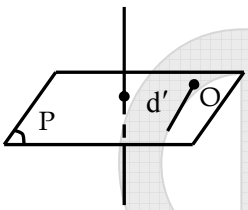
تعریف: خط d را در صورتی بر صفحه P عمود می‌گوییم که با هر خط از آن صفحه زاویه قائمه ساخته باشد. به بیان دیگر بر هر خط دلخواه از آن صفحه عمود باشد.



شرط آن که خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، آن است که:

قضیه: اگر خطی بر دو خط ناموازی از صفحه‌ای عمود باشد، بر هر خط دیگر آن صفحه و در نتیجه، بنابر تعریف بر آن صفحه عمود است.

گزاره‌هایی درباره‌ی خط عمود بر صفحه:



۱) بر هر نقطه‌ی واقع بر یک خط راست یا در خارج آن، یک صفحه و فقط یک صفحه عمود بر آن خط مرور می‌کند.

۲) همه‌ی خط‌هایی که از یک نقطه O می‌گذرند و با خط مفروض d زاویه قائمه تشکیل می‌دهند، در صفحه‌ای هستند که بر خط d عمود است.

۳) یک خط و یک صفحه‌ی عمود بر یک خط متوازیند.

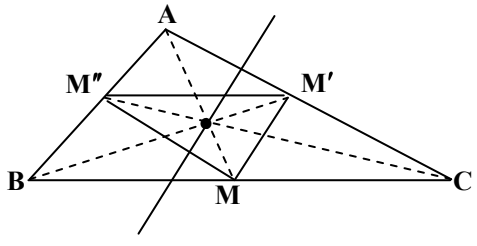
$$(P\perp d,\Delta\perp d)\Rightarrow P\parallel\Delta$$

۴) نقاط B,A از هر صفحه‌ی P که از وسط AB می‌گذرد به یک فاصله‌اند. (هر صفحه‌ی موازی AB نیز این خاصیت را دارد.)

مثال: خط Δ صفحه‌ی مثلث ABC را تنها در نقطه‌ی برخورد میانه‌های مثلث قطع می‌کند. چند صفحه می‌توان بر خط Δ گذراند که رأس‌های این مثلث از آن صفحه به یک فاصله باشند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) بی‌شمار ۴) نشدنی

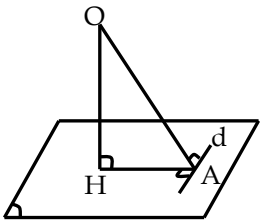
حل: گزینه ۴ پاسخ است.



صفحاتی که A و B و C از آن ها به یک فاصله اند، یا صفحات موازی صفحه مثلث می باشند یا صفحاتی که از اواسط اضلاع مثلث می گذرند، می‌باشد. حال دقت کنید که خطوطی که صفحه‌ی مثلث را قطع می کنند یا با خطوط صفحه متقاطع است یا متنافر که چون با MM' و $M'M''$و $M''M$ متنافر است. هیچ صفحه ای شامل Δو یکی از این خطوط نمی توان کشید و چون Δ با صفحه متقاطع است نمی توان صفحه ای از Δ گذراند که با صفحه‌ی مثلث موازی باشد. پس چنین صفحه ای غیر قابل رسم است.

۵) نقاط P, N, M اوساط اضلاع AB, AC, BC از مثلث ABC هستند. هر صفحه P که شامل دو نقطه از سه نقطه P, N, M باشد، رأسهای مثلث از صفحه‌ی P به یک فاصله‌اند. (هر صفحه موازی صفحه مثلث ABC نیز این خاصیت را دارد)

۶) قضیه‌ی سه عمود:



نقطه‌ی O خارج صفحه P و خط d داخل صفحه P قرار دارد.

الف) $AH \subset P \ , \ OH \perp P, HA \perp d \Rightarrow OA \perp d$

ب) $AH \subset P \ , \ OH \perp P, OA \perp d \Rightarrow HA \perp d$

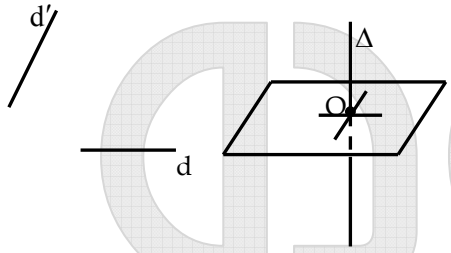
۷) مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه‌ی A و B به یک فاصله‌اند، صفحه عمود منصف پاره‌خط AB است.

۸) مکان هندسی نقاط متساوی الفاصله از سه رأس مثلث، خطی است که از مرکز دایره محیطی مثلث بر صفحه مثلث عمود می‌شود. و مکان هندسی نقاط متساوی الفاصله از سه ضلع مثلث، چهار خط است که در مرکز دایره‌ی محاطی داخلی و مراکز دوایر محاطی خارجی بر صفحه‌ی مثلث عمود می‌شود.

مثال: نقطه‌ی O و دو خط متنافر d, d' مفروضند. بر نقطه O چند خط می‌توان مرور داد به گونه‌ای که هم بر d و هم بر d' عمود باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

حل: گزینه ۲ صحیح است.

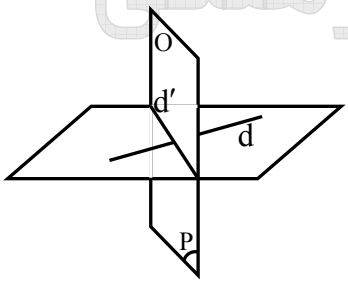


از نقطه O دو خط موازی با d, d' رسم می‌کنیم. این دو خط یک صفحه را مشخص می‌کنند، در نقطه O فقط یک خط مانند Δ بر این صفحه می‌توان عمود کرد و این خط که بر خطوط موازی با d, d' عمود است بر d, d' نیز عمود است. (یا خطی که از نقطه‌ی O به موازات عمود مشترک d, d' رسم می‌شود.)

مثال: صفحه P و نقطه‌ی O واقع بر آن صفحه و خط d مفروضند. در صفحه P از نقطه‌ی O چند خط می‌توان رسم کرد، به گونه‌ای که هر یک از آنها بر d عمود باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار یا ۱

حل: گزینه ۴ صحیح است.



همه‌ی خط‌هایی که از O می‌گذرند و بر خط d عمودند صفحه‌ای را تشکیل می‌دهند، این صفحه را از O بر d عمود می‌کنیم. فصل مشترک این صفحه با صفحه P جواب مسأله است. اگر خط d بر صفحه P عمود نباشد، مسأله فقط یک جواب دارد. اگر عمود باشد، تمام خطوط گذرنده از O بر خط d عمود است و مسأله بی‌شمار جواب دارد.

مثال: دو نقطه ثابت A, B و خط d که در صفحه عمود منصف AB قرار ندارند، مفروضند. روی خط d حداکثر چند نقطه مانند C وجود دارد که مثلث ABC متساوی‌الساقین باشد؟ (در رأس C)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

حل: گزینه ۱ صحیح است.

محل تلاقی صفحه عمود منصف AB با خط d همان نقطه C مطلوب است.

مثال: نقاط D,C,B,A غیر واقع بر یک صفحه مفروضند. چند صفحه از نقطه‌ی D می‌گذرد بطوریکه نقاط C,B,A از آن به یک فاصله باشند؟

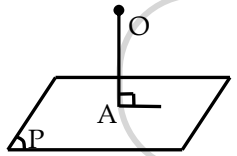
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ٤) ٤

حل: گزینه ٤صحیح است.

صفحه‌ای که از D به موازات صفحه‌ای که از C,B,A می‌گذرد، رسم می‌شود. همچنین صفحاتی که از D و اوساط BC,AC,AB می‌گذرند که سه صفحه است، جواب مسأله است. لذا چهار صفحه جواب است.

فاصله نقطه از صفحه:

اندازه‌ی پاره‌خطی که از هر نقطه O بر صفحه P عمود شود، از اندازه هر پاره‌خط دیگری که از یک طرف به نقطه O و از طرف دیگر به یکی از نقاط صفحه P محدود باشد، کوتاهتر است. به بیان دیگر، پاره‌خطی که از یک نقطه خارج صفحه‌ای بر آن صفحه عمود می‌شود کوتاهترین پاره‌خطی است که بین آن نقطه و صفحه مفروض محصور می‌باشد، طول این کوتاهترین پاره‌خط محدود به نقطه O و صفحه P را فاصله‌ی آن نقطه از صفحه می‌گوییم. اگر نقطه روی صفحه باشد، فاصله نقطه از صفحه را صفر در نظر می‌گیریم.



فاصله‌ی دو صفحه‌ی متوازی:

اگر دو صفحه متوازی باشند، پاره‌خطهایی که بر دو صفحه عمود و از دو طرف به صفحه‌ها محدود باشند، مساوی یکدیگرند. اندازه‌ی هر یک از این پاره‌خطها در حقیقت فاصله‌ی یک نقطه دلخواه یک صفحه، از صفحه‌ی دیگر است و آن را فاصله‌ی دو صفحه می‌گوییم. فاصله هر صفحه از خودش را صفر تعریف می‌کنیم.

فاصله خط از صفحه موازی آن:

اگر خطی با صفحه‌ای موازی باشد، همه‌ی نقطه‌های آن خط از صفحه به یک فاصله‌اند در این صورت فاصله هر نقطه‌ی خط را از صفحه، فاصله‌ی خط از صفحه می‌گوییم. فاصله‌ی خط از صفحه موازی با آن عبارت است از فاصله‌ی هر نقطه دلخواه خط از آن صفحه.

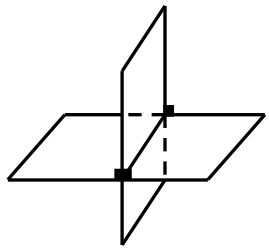
نکته: اگر دو نقطه B,A از صفحه مفروض P به یک فاصله و هر دو در یک طرف آن صفحه باشند، پاره‌خط AB موازی با صفحه P است.

نکته: اگر دو نقطه‌ی B,A از صفحه P به یک فاصله و در دو طرف صفحه‌ی P باشند، صفحه P بر وسط AB می‌گذرد.

زاویه دو صفحه:

اگر دو صفحه در خطی مانند d متقاطع باشند و در یک نقطه از خط d صفحه‌ای بر آن عمود کنیم، این صفحه با دو صفحه‌ی مزبور در دو خط متقاطع است (برای دو نیم صفحه). زاویه‌ی بین دو خط مزبور را زاویه‌ی بین دو صفحه می‌گوییم.

صفحه‌های عمود بر هم:



دو صفحه‌ی متقاطع را در صورتی عمود بر هم می‌گوییم که فرجه‌های بین آنها قائمه باشند، روشن است که اگر یکی از چهار وجه گوژی که از تقاطع دو صفحه پدید می‌آیند قائمه باشد، سه فرجه‌ی دیگر نیز قائمه‌اند.

دو صفحه متقاطع وقتی بر هم عمودند که از تقاطع آنها فرجه‌های قائمه پدید آید.

شرط آنکه دو صفحه بر هم عمود باشند:

قضیه: اگر خطی بر صفحه‌ای عمود باشد، هر صفحه که بر آن خط بگذرد بر صفحه‌ی مفروض عمود است. یعنی اگر d' یک خط و P',P دو صفحه باشند:

$$(d' \perp P, d' \subset P') \Rightarrow P' \perp P$$

نتیجه: دو صفحه در صورتی بر هم عمودند که یک خط از یکی بر دیگری عمود باشد.

قضیه: اگر دو صفحه بر هم عمود باشند، هر خط که در یکی از آنها بر فصل مشترکشان عمود باشد بر صفحه‌ی دیگر عمود است.

روشن است که بر هر خط d صفحه‌های بی‌شمار می‌گذرد. پس اگر خط d بر صفحه‌ای مانند P عمود باشد، همه‌ی صفحه‌هایی که بر d می‌گذرند بر صفحه‌ی P عمودند.

بنابر این بر هر خط عمود بر یک صفحه، بی‌شمار صفحه عمود بر آن صفحه می‌گذرد.

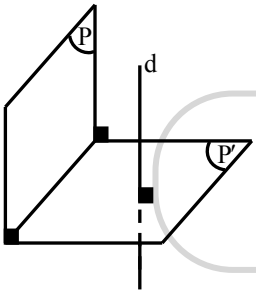
نکته: اگر یکی از دوصفحه موازی بر صفحه‌ای عمود باشد، دیگری نیز بر آن صفحه عمود است.

گزاره‌هایی درباره‌ی صفحه‌های عمود بر هم:

۱) اگر دو صفحه بر یکدیگر عمود باشند، هر خط عمود بر یکی از آنها با دیگری موازی است.

$$(P \perp d\ ,\ P \perp Q) \Rightarrow d \parallel Q$$

۲) بر هر خط که بر صفحه‌ای عمود نباشد، یک صفحه و فقط یک صفحه عمود بر صفحه‌ی مفروض می‌گذرد.

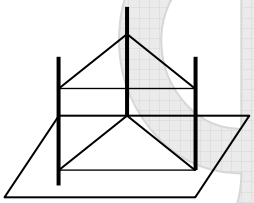


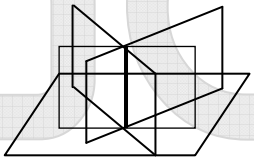
مثال: اگر هر سه صفحه‌ی متمایز بر صفحه‌ی P عمود باشند، آن‌گاه فصل مشترک‌های دوبه‌دوی این سه صفحه‌ی متمایز کدام وضعیت را نمی‌پذیرد؟

۱) فصل مشترک ندارند. ۲) منطبق ۳) موازی ۴) متقاطع

حل: گزینه ۴ پاسخ است.

فصل مشترک ۲ صفحه متقاطع، که هر دو بر صفحه سومی عمود باشند، بر صفحه سوم عمود است. حال این سه خط یا موازیند یا منطبق.

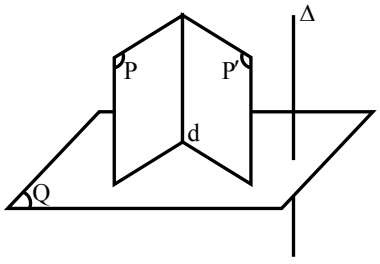




مثال: دو صفحه‌ی متقاطع P', P بر صفحه‌ی سومی عمودند. فصل مشترک آن دو صفحه‌ی P', P با خط عمود بر صفحه‌ی سوم کدام وضع را دارد؟

۱) عمود ۲) متنافر ۳) موازی ۴) نامشخص

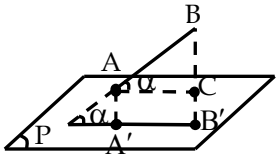
حل: گزینه ۳ صحیح است.



$$P \cap P' = d \qquad P \perp Q\ ,\ P' \perp Q \Rightarrow d \perp Q$$

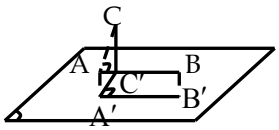
$$\left.\begin{matrix} \Delta \perp Q \\ d \perp Q \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \parallel \Delta$$

تصویر یک پاره‌خط بر یک صفحه:



از نقاط B, A دو عمود بر صفحه‌ی P رسم می‌کنیم، $A'B'$ را تصویر پاره‌خط AB روی P می‌نامیم و اندازه‌ی تصویر پاره‌خط AB بر صفحه‌ی P برابر است با:

$$A'B' = AC = AB\cos\alpha \qquad (0 \le \alpha \le 90)$$



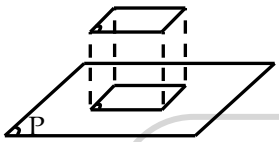
نکته: اگر یک ضلع زاویه قائمه $B\hat{A}C$ موازی صفحه‌ی P باشد و ضلع دیگر بر صفحه‌ی P عمود نباشد، در این صورت تصویر زاویه‌ی $B\hat{A}C$ بر صفحه‌ی P زاویه‌ای است قائمه.

نتیجه: تصویر هر متوازی‌الاضلاع که صفحه‌ی آن بر صفحه‌ی تصویر عمود نباشد، یک متوازی‌الاضلاع است. عکس این مطلب لزوماً صحیح نیست، یعنی ممکن است تصویر یک شکل بر یک صفحه متوازی‌الاضلاع باشد ولی خود آن شکل متوازی‌الاضلاع نباشد.

مثال: تصویر مستطیلی بر یک صفحه‌ی مفروض مربع است. در این صورت کدام درست است؟

۱) قطر مستطیل موازی صفحه است.
۲) طول مستطیل موازی صفحه است.
۳) عرض مستطیل موازی صفحه است.
۴) صفحه مستطیل موازی صفحه است.

حل: گزینه ۳ صحیح است.



عرض مستطیل تغییر نمی‌کند و زاویه‌ی صفحه مفروض با صفحه‌ی مستطیل چنان است که تصویر طول مستطیل برابر عرض آن شده است. پس عرض مستطیل موازی صفحه مفروض بوده و طول آن با صفحه زاویه‌ای ساخته که اندازه‌اش کوچکتر شده است.

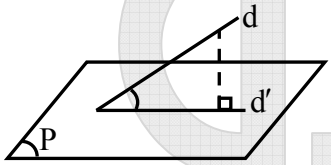
مثال: تصویر مربع بر صفحه‌ای که با یک قطر آن موازی و بر قطر دیگر عمود نباشد کدام چهارضلعی است؟

۱) مستطیل
۲) لوزی
۳) متوازی‌الاضلاع
۴) ذوزنقه‌ی قائم‌الزاویه

حل: گزینه ۲ صحیح است.

تصویر مربع بر هر صفحه‌ای یک متوازی‌الاضلاع است. (به شرط آن که صفحه‌ی مربع بر صفحه‌ی تصویر عمود نباشد.) چون دو قطر مربع بر هم عمودند و یکی از آنها با صفحه‌ی تصویر موازی است، پس تصاویر آنها نیز بر هم عمودند و متوازی‌الاضلاعی که دو قطرش بر هم عمود باشند، یک لوزی است.

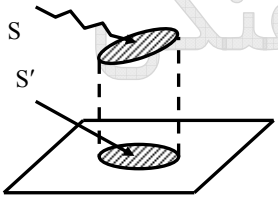
زاویه خط با صفحه:



اگر d' تصویر خط d بر روی صفحه‌ی P باشد، زاویه‌ی حاده‌ی بین این دو خط، زاویه‌ی خط d با صفحه‌ی P نامیده می‌شود. این زاویه کوچکترین زاویه‌ای است که خط d با خط‌های صفحه‌ی P می‌سازد.

تصویر یک شکل مسطح بر یک صفحه:

اگر از هر نقطه شکل مسطح بر صفحه‌ی تصویر عمود رسم کنیم، مجموعه‌ی نقاط حاصل بر صفحه‌ی تصویر را تصویر شکل مورد نظر بر صفحه می‌نامیم. (البته کافی است مرز شکل را تصویر کنیم.)



نکته: مساحت تصویر هر شکل مسطح بر یک صفحه برابر است با حاصل‌ضرب مساحت آن شکل در کسینوس زاویه‌ی مسطحه‌ی بین صفحه‌ی شکل و صفحه‌ی تصویر.

$$S' = S\cos\alpha$$

مثال: مثلثی به اضلاع $\sqrt{۷}, \sqrt{۳}, ۲$ را روی صفحه‌ی P تصویر نموده‌ایم. اگر مساحت تصویر $\frac{۳}{۲}$ گردد، زاویه بین دو صفحه چند درجه است؟

۱) $۲۲/۵^\circ$
۲) ۳۰°
۳) ۴۵°
۴) ۶۰°

حل: گزینه ۲ صحیح است.

$\left(\sqrt{۷}\right)^۲ = \left(\sqrt{۳}\right)^۲ + (۲)^۲ \Rightarrow$ مثلث قائم‌الزاویه است.

$$S' = S\cos\theta \to S = \frac{۲\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳} \to \frac{۳}{۲} = \sqrt{۳}\cos\theta \to \cos\theta = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \to \theta = ۳۰^\circ$$